

حوليات الرياضيات

3AS

مواضيع مقترحة
لشهادة البكالوريا

Hard_equation

- مواضيع بكالوريا
- اختبارات نموذجية
- حلول مفصلة

إعداد : ع . بومهدي



المُجتَهد

في

الرياضيات

مواضيع مقترحة

السنة 3 ثانوي

BAC

وفق المنهاج الجديد الذي أقرته

وزارة التربية الوطنية

دار المجتهد للنشر والتوزيع

E-mail : Almoujtahid @ hotmail.com

طبعة 2012-2013

بسم الله الرحمن الرحيم

الإيداع القانوني D. L : 2011 – 5339

ر.د.م.ك ISBN : 978- 9947 -906-51– 4

➢ إعداد : ع . بومهدي

- ❖ مواضيع بكالوريا
- ❖ اختبارات نموذجية
- ❖ حلول مفصلة

☆ شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

شعبة علوم الطبيعة و الحياة

بكالوريا جوان 2011

التمرين الأول :(3 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = u_n + \frac{1}{2}$.

- في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات ؛ إجابة واحدة فقط منها صحيحة ؛ حددها مع التعليل .

1- المتتالية (v_n)

أ- حسابية ب- هندسية

جـ- لاحسابية و لا هندسية .

2- نهاية المتتالية (u_n) هي

أ- $+\infty$ ب- $\frac{-1}{2}$ جـ- $-\infty$

3- نضع من أجل عدد طبيعي n

$$S_n = \frac{-1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + ... + e^{n\ln 3}\right]$$

أ- $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ ، ب- $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$

جـ- $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

التمرين الثاني :(5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ؛ المستوي (p) الذي يشمل النقطة $A(1 , -2 , 1)$ و $\vec{n}(-2,1,5)$ شعاع ناظمي له ؛ و ليكن (Q) المستوي ذا المعادلة $x + 2y - 7 = 0$.

1- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

2- أ- تحقق أن النقطة $B(-1 , 4 , -1)$ مشتركة بين المستويين (P) و (Q) .

ب- بين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له .

3- لتكن النقطة $C(5 , -2 , -1)$

أ- أحسب المسافة بين النقطة C و المستوي (P) ثم المسافة بين النقطة C و المستوي (Q) .

ب- أثبت أن المستويين (P) و (Q) متعامدان .

جـ- استنتج المسافة بين النقطة C و المستقيم (Δ) .

التمرين الثالث :(5 نقاط)

نعتبر المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ النقط A , B , C التي لاحقاتها على التوالي :

$z_A = -i$ ؛ $z_B = 2 + 3i$ و $z_C = -4 + i$

1- أ - أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

ب- عين طول المركبة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له ؛ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2- نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ؛ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' = iz - 1 - i$$

أ- عين طبيعة التحويل T محدداً عناصره المميزة .

ب- ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .

3- لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$

أ- بين أن النقاط A , C , D في استقامية .

ب- عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى النقطة D .

جـ- عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

التمرين الرابع :(7 نقاط)

1) نعتبر الدالة g المعرفة على $R - \{-1\}$ بـ $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل التالي) ؛

بقراءة بيانية :

أ- شكل جدول تـغيرات الدالة g .

ب- حل بيانياً المتراجحة $g(x) > 0$.

جـ- عيـــــــــن بيانياً قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1\ ,+\infty[$ بـ

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o\ ,\vec{i}\ ,\vec{j})$.

1- أحسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسياً .

2-أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من الـمجال $]1\ ,+\infty[$

$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب- أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جدول التغيرات الدالة f .

3- أ - باستعمال الجزء I) السؤال جـ ، عين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1\ ,+\infty[$.

ب- α عدد حقيقي .

- بين أن الدالة : $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha ,+\infty[$.

جـ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1\ ,+\infty[$ ، $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على المجال $]1\ ,+\infty[$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول :(4 نقاط)

α عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1 .

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$.

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1} .$$

1 - أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

ب- أكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α عبارة u_n .

جـ- عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة .

2- نضع $\alpha = \frac{3}{2}$.

- أحسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث :

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$$

و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

التمرين الثاني :(4 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A , B , C التي لاحقاها على الترتيب :

$z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ و $z_C = 4i$

1- أ - علّم النقط A , B , C .

ب- ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علل إجابتك .

جـ- عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$

2- عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\| \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 12$$

3- أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ؛ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-6z+13=0$.

نسمي z_0 ؛ z_1 حلي هذه المعادلة .

ب- لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z .

عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$|z-z_0|=|z-z_1|$.

التمرين الثالث : (5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(0,1,5)$ ؛ $B(2,1,7)$ ؛ $C(3,-3,6)$.

1- أ - أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}(1,-4,-1)$ شعاع توجيه له .

ب- تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

جـ- بين أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان .

د- استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .

2- نعتبر النقطة $M(2+t\,,1-4t\,,7-t)$ حيث t عدد حقيقي ؛ و لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(t)=AM$

أ- أكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t ؛

$$h'(t)=\frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$$

جـ- استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن .

قارن بين القيمة الصغرى للدالة h ؛ و المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x)=e^x-ex-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ - أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- أحسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها .

جـ- شكل جدول تغيرات الدالة f .

2 - أ - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

ب- أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

جـ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75\,;\,1,76[$ حلا وحيداً α.

د- أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty\,,2]$.

3 - أ - أحسب بدلالة α ؛ المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\alpha$.

ب- أثبت أن $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$

(ua هي وحدة المساحات) .

حـل الموضوع الأول

التمرين الأول :

تحديد الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث مع التعليل :

الاقتراح	الإجابة الصحيحة	التعليل
1	ب- هندسية	$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2}$ $= 3(u_n + \frac{1}{2}) = 3v_n$
2	جـ- النهاية $-\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_n - \frac{1}{2}\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}\right) = -\infty$
3	جـ- المجموع S_n	$S_n = \frac{-1}{2}\left(1+3+3^2+...+3^n\right)$ $= \frac{1}{2}\left(1\times\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right) = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

التمرين الثاني :

1- كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) :

(P) له معادلة من الشكل $ax + by + cz + d = 0$

لدينا الشعاع $\vec{n}(-2,1,5)$ ناظمي للمستوي (P) .

و منه (P) معادلته من الشكل :

$$-2x + y + 5z + d = 0$$

$A \in (P)$ معناه $-2 + (-2) + 5 + d = 0$

و منه : $d = -1$.

و منه (P) معادلته من الشكل $-2x + y + 5z - 1 = 0$

2-أ- التحقق أن النقطة B مشتركة بين المستويين (P) و (Q) :

لدينا $B \in (P)$ لأن $-2(-1)+(4)+5(-1) - 1 = 0$

لدينا : $B \in Q$ لان $(-1) + 2(4) - 7 = 0$

و منه النقطة B مشتركة بين المستويين (P) و (Q) .

ب- بيان أن (P) و (Q) متقاطعان وفق المستقيم (Δ) :

(P) و (Q) متقاطعان معناه $\vec{n}_p$ لا يوازي $\vec{n}_Q$

$\vec{n}_p(-2 , 1 , 5)$ لا يوازي $\vec{n}_Q(1 , 2\ 0)$ لأن :

$\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1}$ إذن (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

- تعين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

لتعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) نحل الجملة التالية :

$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \text{ ....(1)} \\ -2x + y + 5z - 1 = 0 \text{.........(2)} \end{cases}$$

نضع $y = t$ حيث t وسيط حقيقي

من المعادلة (1) نجد $x = -2t + 7$

بتعويض قيمة كل من y و x في المعادلة (2) نجد

$-2(-2t + 7) + t + 5z - 1 = 0$ و منه $z = -t + 3$.

التمثيل الوسيطي لـ (Δ) هو : $\begin{cases} x = -2t + 7 \\ y = t \\ z = -t + 3 \end{cases}$ و $(t \in R)$

3-أ- حساب المسافة بين C و (P) ثم بين C و (Q) :

$$d(C;(p)) = \frac{|-2(5) + (-2) + 5(-1) - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (5)^2}} = \frac{18}{\sqrt{30}}$$

$$d(C;(Q)) = \frac{|(5) + 2(-2) - 7|}{\sqrt{1+4}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

ب- إثبات أن المستويين (P) و (Q) متعامدان :

(P) و (Q) متعامدان معناه $\vec{n}_P$ يعامد $\vec{n}_Q$ معناه :

$$\vec{n}_P . \vec{n}_Q = 0$$

$$\vec{n}_P . \vec{n}_Q = 1(-2) + 2(1) + 0(5) = 0$$

إذن : $(P) \perp (Q)$.

جـ- استنتاج المسافة بين النقطة C و المستقيم (Δ) :

المسافة بين النقطة C و المستقيم (Δ) هي الطول CH

حيث H هي المسقط العمودي للنقطة C على (Δ) .

لدينا : $CH^2 = d(C;(P))^2 + d(C;(Q))^2$

و منه :

$$CH = \sqrt{d(C;(P))^2 + d(C;(Q))^2} = 3\sqrt{2}$$

التمرين الثالث :

- أ - كتابة على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4+i+i}{2+3i+i} = \frac{(-4+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}$$

$$= \frac{20i}{20} = i$$

ب- تعيين طبيعة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له :

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |i| = 1$$

و $$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

- استنتاج طبيعة المثلث ABC :

نستنتج مما سبق أن $AC = AB$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$

و منه المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين .

2-أ - تعيين طبيعة التحويل T و تحديد عناصره المميزة :

من العبارة المركبة للتحويل T لدينا :

$$a = i \text{ و } b = -1 - i$$

التحويل T دوران لأن $|a| = 1$

العناصر المميزة هي الزاوية $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$ و المركز هو A

لأن :

$$\frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{2} = -i = z_A$$

ب- تعيين صورة النقطة B بالتحويل T :

لدينا : $z_B = iz_B - 1 - i = i(2+3i) - 1 - i = -4 + i$

و منه صورة النقطة B بالتحويل T هي النقطة C .

3 - أ - بيان أن النقط D , C , A في استقامية :

النقط D , C , A في استقامية معناه $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ حقيقي

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-6+3i}{-4+2i}$$

$$= \frac{(-6+3i)(-4-2i)}{(-4+2i)(-4-2i)} = \frac{3}{2}$$

و منه نقط D , C , A في استقامية .

ب- تعين نسبة التحاكي h :

العبارة المختصرة المركبة للتحاكي h هي :

$$z_D - z_A = k\,(z_C - z_A)$$

حيث k هي نسبة التحاكي h و منه : $k = \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3}{2}$

جـ- تعين العناصر المميزة للتشابه S :

العبارة المختصرة المركبة للتشابه S هي :

$$z_D - z_A = a(z_B - z_A)$$

حيث Z عدد مركب و $a = [r;\theta]$.

$$a = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-6+3i}{2+4i} = \frac{(-6+3i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}$$

$$= \frac{30i}{20} = \frac{3}{2}i$$

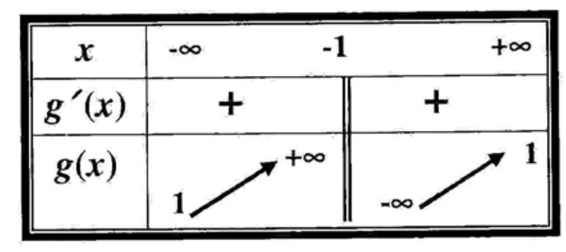
و منه نسبة التشابه S هي :

$$|a| = \frac{3}{2} \text{ و زاوية } \arg(a) = \frac{\pi}{2}$$

التمرين الرابع :

I - بقراءة بيانية

أ - تشكيل جدول التغيرات للدالة g :



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	‖	$+$
$g(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

ب- حل بيانياً المتراجحة $g(x) > 0$:

من البيان $g(x) > 0$ تكافئ

$$x \in]-\infty , -1[\cup]1 , +\infty[$$

لأن (C_g) يقع فوق محور الفواصل على هاذين المجالين .

جـ-تعيين بيانياً قيم x والتي من أجلها يكون $0 < g(x) < 1$

$$0 < g(x) < 1$$

من البيان لدينا : $0 < g(x) < 1$ تكافئ

$$x \in]1 , +\infty[$$

II - 1 - حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= 1 + 0 = 1$$

التفسير الهندسي للنتيجتين :

(C_f) يقبل مستقيماً مقارباً عمودياً معادلته $x = 1$

(C_f) يقبل مستقيماً مقارباً أفقياً معادلته : $y = 1$ بجوار $+\infty$

2-أ- بيان أن $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ من أجل $x \in]1,+\infty[$

$$g'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب- حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها و تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا : $f(x) = g(x) + \ln(x-1) - \ln(x+1)$

$$f'(x) = g'(x) + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} > 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما من أجل كل $x \in]1 , +\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	1

3- أ - تعيين إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1 , +\infty[$:

من I) جـ- لدينا $x \in]1 , +\infty[$

و منه : $\ln[g(x)] < \ln 1$

أي : $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 1$

ب- بيان أن الدالة $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$ أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha ; +\infty[$

$$\left[(x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x\right]'$$

$$= 1.\ln(x-\alpha) + \frac{1}{x-\alpha}(x-\alpha) - 1$$

$$= 1\ln(x-\alpha) + 1 - 1 = \ln(x-\alpha)$$

جـ- التحقق من أن $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$:

من أجـــل $x \in]1 , +\infty[$

لدينا : $g(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-1-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$

تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1 , +\infty[$:

لدينا : $f(x) = g(x) + \ln(x-1) - \ln(x+1)$

الدالة الأصلية لـ g هي الدالة $x \mapsto x - 2\ln(x+1)$

حسب الجواب 3-ب)

نستنتج أن الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-1)$

هي الدالة $x \mapsto (x-1)\ln(x-1) - x$

و الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \ln(x+1)$

هي الدالة $x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$

و منه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث :

$$F(x) = x + (x-1)\ln(x-1) - (x+3)\ln(x+1)$$

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1 – أ – أبيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α :

(v_n) هندسية أساسها α معناه $v_{n+1}=\alpha v_n$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ لدينا : $v_n=u_n+\dfrac{1}{\alpha-1}$

و $u_{n+1}=\alpha u_n+1$

$$v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{\alpha-1}$$
$$=\alpha u_n+1+\frac{1}{\alpha-1}$$
$$=\alpha\left(u_n+\frac{1}{\alpha-1}\right)=\alpha v_n$$

ب–كتابة v_n بدلالة n و α واستنتاج u_n بدلالة n و α :

لدينا : $v_n=v_0\times q^n$

حيث : $v_n=u_0+\dfrac{1}{\alpha-1}=6+\dfrac{1}{\alpha-1}$ و منه :

$$v_n=\left(6+\frac{1}{\alpha-1}\right).\alpha^n=\frac{6\alpha^{n+1}-5\alpha^n}{\alpha-1}$$

لدينا : $v_n=u_n+\dfrac{1}{\alpha-1}$ و منه :

$u_n=v_n-\dfrac{1}{\alpha-1}$ و منه :

$$u_n=\frac{6\alpha^{n+1}-5\alpha^n}{\alpha-1}-\frac{1}{\alpha-1}$$
$$=\frac{6\alpha^{n+1}-5\alpha^n-1}{\alpha-1}$$

جـ– تعيين قيم α التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) متقاربة :

حتى تكون (u_n) متقاربة يجب أن يكون الأساس $0<\alpha<1$.

2– حساب المجموعين S_n و T_n :

$$S_n=v_0+v_1+....+v_n=v_0\left(\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}\right)$$

لدينا : $=8\times\left(\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1}\right)=16\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right)$

لدينا : $T_n=u_n+u_1+....+u_n$

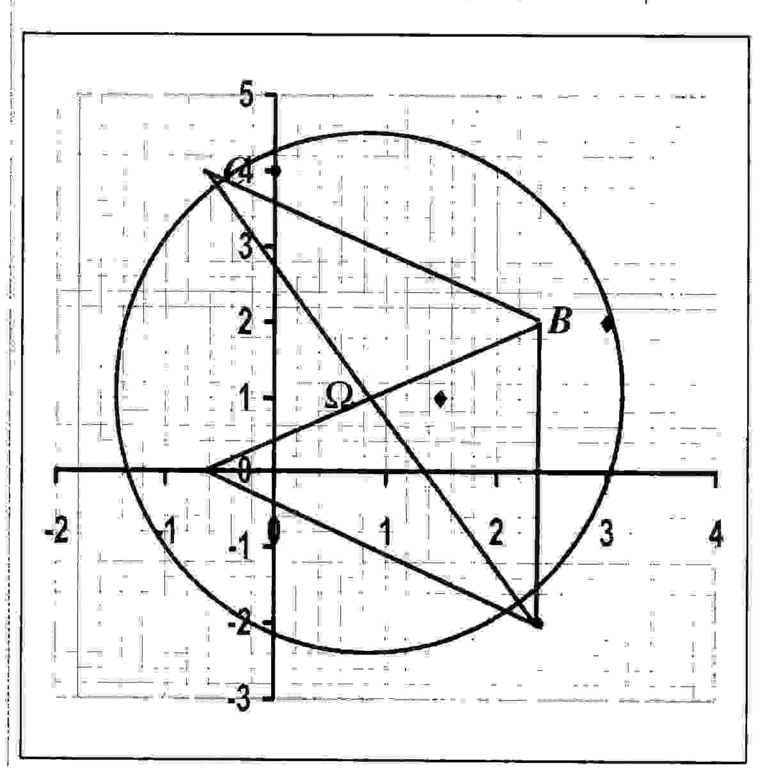
نعلم أن $u_n=v_n-\dfrac{1}{\alpha-1}$ و منه : $u_n=v_n-2$

و عليه $T_n=(v_0-2)+(v_1-2)+...+(v_n-2)$

$$T_n=(v_0+v_1+...+v_n)-2(n+1)=S_n-2(n+1)$$

التمرين الثاني :

أ– تعليم النقط A , B , C :



ب– تعين طبيعة الرباعي $OABC$ مع التعليل :

الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع لأن :

$$\overrightarrow{OC}(z_C-z_O)=\overrightarrow{AB}(z_B-z_A)$$

أي : $\overrightarrow{OC}(4i)=\overrightarrow{AB}(4i)$

جـ– تعين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$:

النقطة Ω هي منتصف القطرين $[AC]$ و $[OB]$

لاحقة Ω هي : $z_\Omega=\dfrac{z_O+z_B}{2}=\dfrac{0+3+2i}{2}=\dfrac{3}{2}+i$

2– تعيين ثم إنشاء مجموع النقط (E) :

لدينا : $\left\| \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 12$ .... *

(*) تكافئ $\left\| 4\,\overrightarrow{M\Omega} \right\| = 12$

لأن Ω مركز الرباعي OABC .

(*) تكافئ $\left\| \overrightarrow{M\Omega} \right\| = 3$ و عليه مجموعة النقط (E) هي

دائرة مركزهـا Ω و نصف قطرها 3 .

ملاحظة : إنشاء (E) في الشكل السابق .

3- أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة C ؛ المعادلة ذات

المجهول z التالية : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

لحل هذه المعادلة نستعمل المميز المختصر $\Delta' = b'^2 - ac$

لدينا : $\Delta' = (-3)^2 - 2(1)(13) = -4$ أي :

$\Delta' = (2i)^2$ و منه حلا المعادلة هما :

$z_1 = 3 + 2i$ ؛ $z_0 = 3 - 2i$

ب- تعيين مجموعة النقط M من المستوي :

لدينا : $|z - z_0| = |z - z_1|$ تكافئ :

$|z - z_A| = |z - z_B|$ تكافئ $MA = MB$

مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z هي محور القطعة المستقيمة [AB] .

التمرين الثالث :

1- أ - كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) :

لدينا (Δ) يشمل النقطة B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له .

$M(x, y, z)$ نقطة من (Δ) معناه $\overrightarrow{BM} = t\,\vec{u}$ (t وسيط حقيقي)

لدينا : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-7 \end{pmatrix} = t\,\vec{u} - \begin{pmatrix} t \\ -4t \\ -t \end{pmatrix}$

معناه $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -4t + 1 \\ a = -t + 7 \end{cases}$

الجملة الأخيرة هي تـمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)

ب- التحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) :

$C \in (\Delta)$ معناه توجد قيمة وحيدة لـ t

تحقق الجملة $\begin{cases} 3 = t + 2 \\ -3 = -4t + 1 \\ 6 = -t + 7 \end{cases}$ أي $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$

جـ- بيان أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان :

لدينا :

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} . \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1.2 + (-4)0 + 1(-2) = 0$$

$\overrightarrow{BC} . \overrightarrow{AB} = 0$ إذن : $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدان

د- استنتاج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) :

المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) هي الطول AB

لأن $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB}$ و النقطتان B و C تنتميان إلى المستقيم (Δ) .

و منه $AB = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

2-أ- كتابة عبارة $h(t)$ بدلالة t :

لدينا : $h(t) = AM$

$$AM = \sqrt{(2+t)^2 + (-4t)^2 + (2-t)^2} = \sqrt{18t^2 + 8}$$

ب-بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي t ؛ $h'(t) = \dfrac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$:

لدينا $h(t) = \sqrt{18t^2 + 8}$ و منه :

$$h'(t) = \frac{2 \times 18t}{2\sqrt{18t^2 + 8}} = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$$

جـ- استنتاج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن .

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن عندما يكون للدالة h قيمة حدية صغرى (ينعدم المشتق ويغير إشارته) .

$h'(t) = 0$ معناه $\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}} = 0$ و منه $t = 0$

إشارة المشتق : $h'(t)$ هي حسب الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$

المقارنة بين القيمة الحدية الصغرى للدالة h ؛ و المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .

نجد أن $h(0)=2\sqrt{2}=AB$

التمرين الرابع :

$$f(x)=e^{x}-ex-1$$

1- أ - حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{x}-ex-1=+\infty$$

ح.ع.ت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-ex-1=+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{x}}{x}-e-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{x}}{x}\right)=+\infty$$

ب- حساب $f'(x)$ ثم دراسة إشارتها :

$f'(x)=e^{x}-e$ و إشارته هي : $-$ 1 $+$

جـ- تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

2- أ - بيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$:

لدينا المستقيم (Δ) له معادلة من الشكل $y=-ex-1$

لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-ex-1)]=\lim_{x\to-\infty}(e^{x})=0$$

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

ب- كتابة معادلة للمماس (T) :

(T) له معادلة من الشكل $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

و منه : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

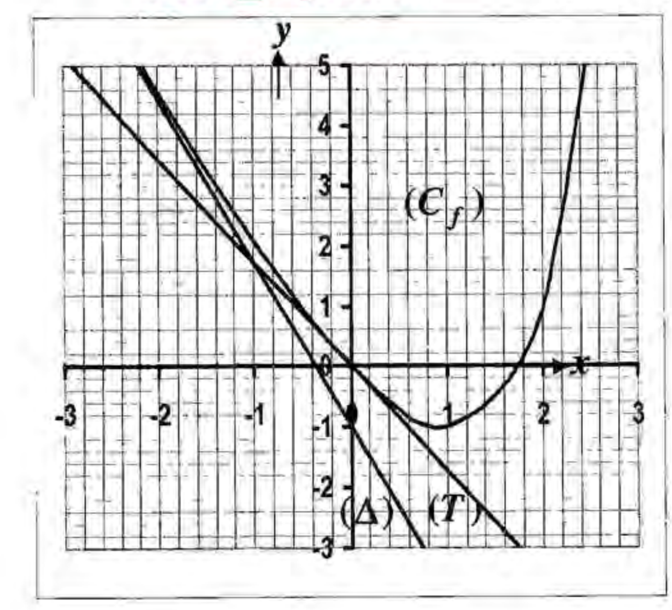
$$y=(1-e)(x-0)+0=(1-e)x$$

جـ- بيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75\,;1,76[$ حلا وحيداً α :

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1,75\,;1,76]$

و : $f(1,75)\times f(1,76)<0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75\,;1,76[$ حلا وحيداً α.

د- رسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty\,,2]$:



3- أ - حساب المساحة $A(\alpha)$:

$$A(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x).dx=-\left[e^{x}-\frac{1}{2}ex^{2}-x\right]_0^{\alpha}$$

- نجد بعد الحساب : $A(\alpha)=\left(1-e^{\alpha}+\frac{1}{2}e^{\alpha^2}+\alpha\right)$

ب- إثبات أن $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\,\alpha^{2}-e\,\alpha+\alpha\right)ua$:

لدينا $f(\alpha)=0$ من الجواب (2-جـ) و منه :

$e^{\alpha}=e.\alpha+1$ بتعويض e^{α} بما يساويها في عبارة $A(\alpha)$

نجد : $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\,\alpha^{2}-e\,\alpha+\alpha\right)u.a$

الاختـــبـــار الثالث

بكالوريا جـــوان 2010

التمرين الأول : (5 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب : $z_A = 1 + i$ و $z_B = 3i$

1/ أكتب على الشكل الأسي : z_A و z_B .

2/ ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة 'M ذات اللاحقة 'z حيث :

$$z' = 2iz + 6 + 3i$$

أ/ عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

ب/ عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

جـ/ استنتج طبيعة المثلث ABC .

3/ لتكن النقطة D مرجح الجملة

$$\{(A ; 2), (B ; -2), (C ; 2)\}$$.

أ/ عين z_D لاحقة النقطة D .

ب/ عين مع التبرير طبيعة الرباعي ABCD .

4/ لتكن النقطة M نقطة من المستوي تختلف عن B و عن D لاحقتها z و لتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

أ/ تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ) .

ب/ أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ ، عين عندئذ المجموعة (Δ) .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط :

A (1 ; 1 ; 0) , B (2 ; 1 ; 1) , C (-1 ; 2 ; -1)

1/ أ/ بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

ب/ بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي :

$$x + y - z - 2 = 0$$

2/ نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتهما على الترتيب :

$$(P) : \ x + 2y - 3z + 1 = 0$$

و $$(Q) : \ 2x + y - z - 2 = 0$$

و المستقيم (D) الذي يشمل النقطة F (0 ; 4 ; 3) و $\vec{u}$ (-1 ; 5 ; 3) شعاع توجيه له .

أ/ أكتب تمثيلا وسطيا للمستقيم (D) .

ب/ تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) .

3/ عين تقاطع المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) .

التمرين الثالث : (10 نقاط)

I/ لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$.

2/ بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكل جدول تغيراتــها .

3/ عين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس مــوازيا للمستــقيم (d) ذي الـمــعادلة $y = x$.

4/ أ/ أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = \ln(x + a) + b$$

حيث : a و b عددان حقيقيان يطلب تعينهما .

ب/ استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغارتمية النيبرية ln ثــم أرسم (C) و (C_f) .

II/ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بــ :

$$g(x) = f(x) - x$$

1/ أحسب $\lim_{x \to \frac{1}{2}^{>}} g(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

2/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها

3/ أ/ أحسب g (1) ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في الــمجال $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ حــلا وحيدا α .

تحقق أن $2 < \alpha < 3$.

ب/ أرسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2}; 5\right]$ في المعلم السابق .

4/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .

5/ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;\alpha[$ فإن : $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

III/ نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي : $u_n = f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$

1/ عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$.

2/ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

حل الاختبار الثالث

التمرين الأول :

1/ كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي :

لدينا $|z_A| = \sqrt{2}$ و $\arg(z_A) = \frac{\pi}{4}$

ومنه : $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا $|z_B| = 3$ و $\arg(z_B) = \frac{\pi}{2}$

ومنه: $z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$

2/ أ/ نسبة التشابه المباشر هو $|2i| = 2$ و زاويته هي arg (2i) أي $\frac{\pi}{2}$ و مركزه هو النقطة ω التي لاحقتها z_0 تحقق $z_0 = 2iz_0 + 6 + 3i$ أي : $z_0 = 3i$

و منه نستنتج أن : $\omega = B$.

ب/ تعيين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S صورة النقطة A بالتشابه تحقق العلاقة :

$$z_C = 2iz_A + 6 + 3i = 4 + 5i$$

جــ/ بما أن C صورة A بالتشابه الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{2}$ فهذا يعني أن المثلث ABC مثلث قائم الزاوية في B .

3/ أ/ بما أن D مرجح الجملة $\{(A,2),(B,-2)(C,2)\}$ فإن : $2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ أي : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

أي : $z_D - z_A = z_C - z_B$ أي : $z_D = 5 + 7i$.

ب/ لدينا $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ في الرباعي ABCD و منه : الرباعي ABCD متوازي أضلاع و لدينا المثلث ABC قائم في B و بالتالي الرباعي ABCD هو مستطيل .

4/ أ/ لدينا : $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i - 6 - 3i}{5 + 3i - 6 - 3i} = 6$

و هو عدد حقيقي موجب إذن $E \in (\Delta)$.

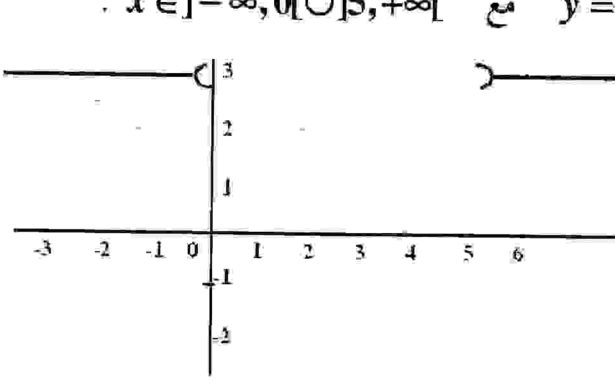
ب/ عمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ هو قيس الزاوية $(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MB})$

لدينا بعد وضع $z = x + iy$ حيث $(x, y)\in \mathbb{R}^2$

نـجد أن $\frac{z_B - z}{z_D - z} \in \mathbb{R}_+^*$ تعني $y = 3$ مع $x \neq 5$

مع $x^2 - 5x > 0$ أي : $x \in]-\infty, 0[\cup]5, +\infty[$

أي أن مجموعة النقط (Δ) هي تقاطع المستقيم ذي المعادلة $y = 3$ بإستثناء النقطة $S(5,3)$ مع المجموعة $]-\infty, 0[\cup]5, +\infty[$ أي هي إتحاد نصفي المستقيمين $y = 3$ مع $x \in]-\infty, 0[\cup]5, +\infty[$.



التمرين الثاني :

1/ أ/ لا يوجد عدد حقيقي k بحيث : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

و لدينا : $\overrightarrow{AB}(1,0,1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2,1,-1)$

فهذا يعني أن النقط A , B , C ليست في استقامية .

ب/ تبيان أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي :

$$x + y - z - 2 = 0$$

نعوض إحداثيات كل نقطة من النقط A , B , C في المعادلة و نتأكد من أنها تحقق المعادلة .

2/ أ/ يعطى التمثيل الوسيط للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $F(0,4,3)$ و شعاع توجيه له $\vec{u}(-1,5,3)$ كمايلي :

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 5\lambda + 4 \\ z = 3\lambda + 3 \end{cases}$$

مع λ عدد حقيق كيفي

ب/ طريقة 1 : تقاطع المستويين (P) و (Q) هو مجموعة النقط $M(x, y, z)$ التي تحقق :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

نضع $z = t$

نحصل على : $\begin{cases} x + 2y = 3t - 1 \\ 2x + y = t + 1 \\ z = t \end{cases}$

أي : $\begin{cases} x = -\frac{1}{3}t + 1 \\ y = \frac{5}{3}t - 1 \\ z = t \end{cases}$ نضع $t = 3\lambda + 3$

نجد : $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 5\lambda + 4 \\ z = 3\lambda + 3 \end{cases}$

و هو التمثيل الوسيطي بـــمستقيم (D) .

طريقة 2 :

بما أن (D) مستقيم التقاطع بين المستويين (P) و (Q) فهذا يعني أن إحداثيات نقط (D) تحقق معادلتي المستويين :

إحداثيات نقط المستقيم (D) هي : $(-\lambda, 5\lambda + 4, 3\lambda + 3)$

تحقق معادلة (P) لاحظ أن :

$$-\lambda + 2(5\lambda + 4) - 3(3\lambda + 3) + 1 = 0$$

و كذلك بالنسبة لمعادلة المستوي (Q) .

3/ تعيين تقاطع المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) :

لدينا : $(Q)\cap(P) = (\Delta)$

مجموعة نقط تقاطع المستويين (ABC) و (P) تحقق إحداثياتها الجملة التالية :

$$\begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

بالتعويض في الجملة حيث $z = t$ فنجد :

$$\begin{cases} x = -t + 5 \\ y = 2t - 3 \\ z = t \end{cases}$$

و هو تــمثيل وسيطي مستقيم شعاع توجيهه $\vec{\omega}(-1,2,1)$

بنفس الطريقة نـــجد تقاطع المستــوي (ABC) و (Q)

هو المستقيم ذو التمثيل $\begin{cases} x = 5t+1 \\ y = 2t-1 \\ z = 3t \end{cases}$

التمرين الثالث :

I/ 1/ أحساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{2}} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

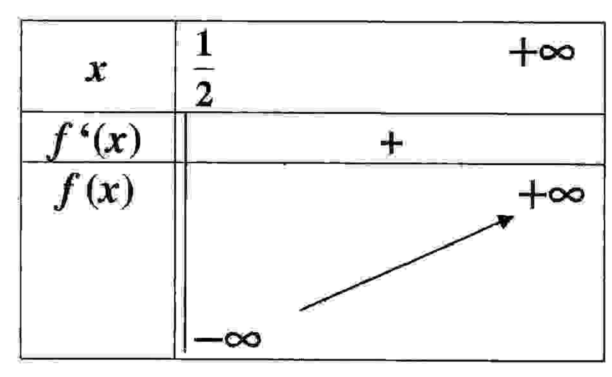
و $$\lim_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{2}} f(x)=-\infty$$

2/ الدالة f تقبل الإشتقاق على I و لدينا :

$f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$ و لدينا $f'(x)>0$ في I

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

جدول تغيرات الدالة f :



x	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3/ حتى يكون المماس (d) موازيا للمنصف الأول يجب أن يتحقق مايلي :

$f'(x_0)=1$ حيث : x_0 فاصلة النقطة المطلوبة .

لدينا : $f'(x_0)=1$ تعني : $\dfrac{2}{2x_0-1}=1$ أي : $x_0=\dfrac{3}{2}$

4/ أ/ إثبات أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\ln(x+a)+b$

لدينا من أجل كل x من I :

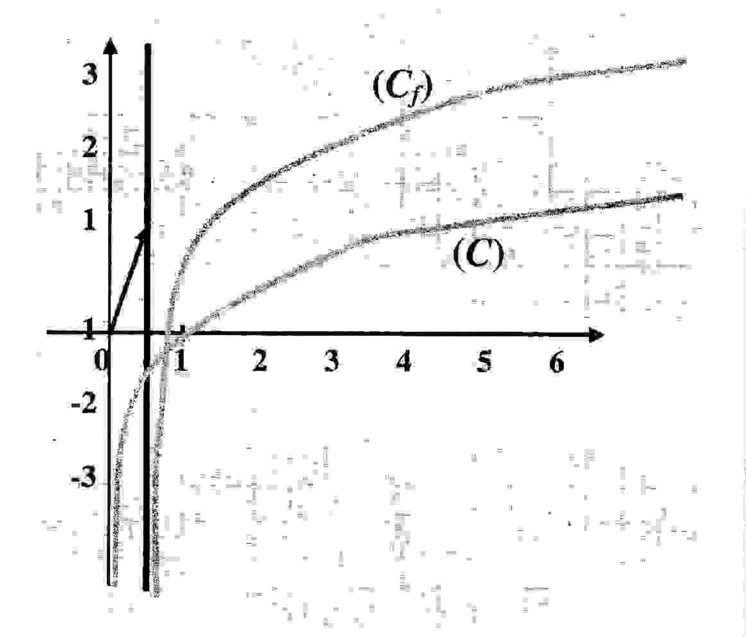
$$f(x)=1+\ln(2x-1)=1+\ln 2(x-\frac{1}{2})$$

$$=1+\ln 2+\ln(x-\frac{1}{2})=\ln(2e)+\ln(x-\frac{1}{2})$$

و منه : $a=-\dfrac{1}{2}$ و $b=\ln 2e$

ب/ استنتاج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغارتمية النيبرية ln ثـم رسم (C) و (C_f) :

حسب الكتابة $f(x)=\ln(x+a)+b$ فإن (C_f) هو صورة (C) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(\frac{1}{2},\ln 2e)$ و بالتالي يكون رسم (C) و (C_f) كما يلي : $\ln 2e \approx 1{,}7$



II/ 1/ حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{2}} g(x)$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{2}} g(x)=\lim_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{2}} 1+\ln(2x-1)-x=-\infty$$

تبيين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+\ln(2x-1)-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty} 1+x\left(\frac{\ln(2x-1)}{x}-1\right)=-\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x-1)}{x}=0$

2/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على I ثم تشكيل جدول تغيراتها :

الدالة g تقبل الإشتقاق على I و لدينا : $g'(x)=\dfrac{3-2x}{2x-1}$

$g'(x)=0$ تعني $x=\dfrac{3}{2}$

حيث : $g'(x)>0$ لـما $x<\dfrac{3}{2}$

و $g'(x)<0$ لـما $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$

- جدول تغيرات الدالة g : نأخذ $g\left(\frac{3}{2}\right)\approx 0,19$

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}+\ln 2$	↘	$-\infty$

3/ أ/ حساب $g(1)$: $g(1)=0$

الدالة g رتيبة تماما على المجال $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ (متناقصة تماما)

و بالتالي صورة المجال $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ بالدالة g هي المجال $\left]-\infty,-\frac{1}{2}+\ln 2\right[$ و بما أن : $-\frac{1}{2}+\ln 2>0$

فهذا يعني أن 0 ينتمي إلى المجال $\left]-\infty,-\frac{1}{2}+\ln 2\right[$

وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ بحيث $g(\alpha)=0$

الدالة g رتيبة تماما على المجال $]2,3[$ و لدينا $g(2)\,g(3)<0$ و بما أن α وحيد فهذا يعني أن $2<\alpha<3$.

ب/ رسم (C_g)

4 / استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال I :

لاحظ البيان : $g(x)\geq 0$ لـما $x\in[1,\alpha]$ و $g(x)\leq 0$ لـما $x\in\left]\frac{1}{2},1\right]\cup[\alpha,+\infty[$.

- تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) :

لتحديد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (d) ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$ أي $g(x)$ و كما هو موضح سابقا فإن : في المجال $[1,\alpha]$ يكون (C_f) تحت (d) و في المجال $\left]\frac{1}{2},1\right]\cup[\alpha,+\infty[$ يكون (C_f) فوق (d) .

5/ الدالة f متزايدة تماما على $[1,\alpha]$ و بالتالي من أجل $1\leq x\leq\alpha$ نجد :

$f(1)\leq f(x)\leq f(\alpha)$ و لكن :

$f(1)=1$ و $f(\alpha)=g(\alpha)+\alpha=\alpha$

لأن : $g(\alpha)=0$ و منه : $1\leq f(x)\leq\alpha$

III/ 1/ تعين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$.

لدينا $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

و بالتالي : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$

تعني : $1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+2\ln 3-3\ln 2$

أي : $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{9}{8}$ ومنه : $n=8$ وهو المطلوب .

2/ حساب المجموع S_n بدلالة n حيث :

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=$$

$$1+\ln\left(1+\frac{1}{2\times 1}\right)+1+\ln\left(1+\frac{1}{2\times 2}\right)+\ldots+1+\ln\left(1+\frac{1}{2\times n}\right)$$

$$=n+\ln\left(\frac{3}{2\times 1}\right)+\ln\left(\frac{5}{2\times 2}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{2n+1}{2\times n}\right)$$

$$=n+\ln\frac{3\times 5\times 7\times\ldots\times(2n+1)}{2^2\times 1\times 2\times 3\times\ldots\times n}$$

$$=n+\ln\frac{3\times 5\times 7\times\ldots\times(2n+1)\times 2\times 4\times 6\times\ldots\times 2n}{2^n\times(1\times 2\times 3\times\ldots\times n)^2\times 2^n}$$

$$=n+\ln\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

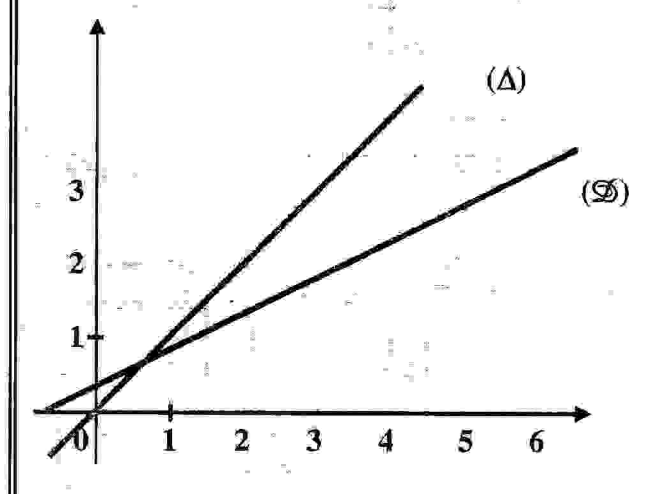
و منه : $S_n=n+\ln\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$

الاختبار الرابع

بكالوريا جوان 2010

التمرين الأول : (5 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس مثلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$.



1/ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$

و من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

أ/ أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

دون حسابها مبرزا خطوط الرسم .

ب/ عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) .

جـ/ أعط تخمينا حول اتجاه تغيير المتتالية (u_n) .

2/ أ/ باستعمال الإستدلال بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{2}{3}$.

ب/ استنتج اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) .

3/ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

أ/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول .

ب/ أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ/ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

و استنتج المجموع S'_n حيث : $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$ ، ثم أكتب الحلين على الشكل الأسي .

2/ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$

نعتبر النقط A , B , C و D لاحقاتها على الترتيب :

$$z_D = -z_B \quad ; \quad z_C = -z_A$$
$$z_B = \bar{z}_A \quad ; \quad z_A = 3 + 3i$$

أ/ بين أن النقط A , B , C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم .

ب/ عين زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى النقطة B .

جـ/ بين أن النقط A ، O و C في إستقامية و كذلك النقط B ، O و D .

د/ استنتج طبيعة الرباعي ABCD .

التمرين الثالث : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

نعتبر المستوي (p) الذي معادلته : $x - 2y + z + 3 = 0$

1/ نذكر أن حامل محور الفواصل $(O ; \vec{i})$ يعرف بالجملة :

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

– عين إحداثيات A نقطة تقاطع حامل $(O ; \vec{i})$ مع المستوي (p) .

2/ B و C النقطتان من الفضاء حيث :

$B(0;0;-3)$ و $C(-1;-4;2)$.

أ/ تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (p) .

ب/ أحسب الطول AB .

جـ/ أحسب المسافة بين النقطة C و المستوي (p) .

3/ أ/ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة C و العمودي على المستوي (p) .

ب/ تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

جـ/ أحسب مساحة المثلث ABC .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

تعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي :

$$f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ أ/ أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب/ أحسب $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و $\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x)$

و فسر هندسيا النتيجة .

2/ أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها .

3/ أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب ؛

$y=x$ و $y=x+1$.

ب/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

4/ أثبت أن النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5/ أ/ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1{,}4<\beta<-1{,}3$.

ب/ هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

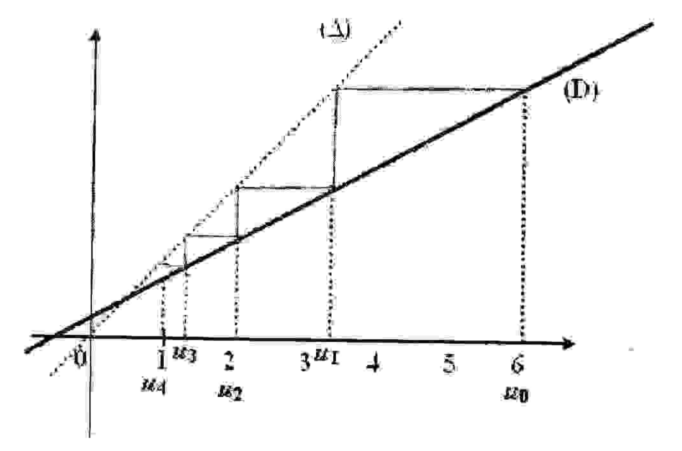
جـ/ أرسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

د/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x}=m$

حل الاختبار الرابع

التمرين الأول :

1/ أ/ نقل الشكل ثم تمثيل على محور الفواصل الحدود التالية : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4



ب/ تعيين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) :

فاصلة نقطة التقاطع (Δ) و (D) هي حلول المعادلة

$x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ أي $x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{3}$

أي $x=\frac{2}{3}$ و منه : $y=\frac{2}{3}$

إذن : $(\Delta)\cap(D)=\left\{H\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$

جـ/ إعطاء تخمينا حول اتجاه تغيير المتتالية (u_n) :

التخمين الذي يمكن إعطاءه هو أن المتتالية متناقصة تماما .

2/ أ/ الخاصية صحيحة من أجل $n=0$ لأن : $u_0>\frac{2}{3}$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $u_n>\frac{2}{3}$

و نثبت أنها صحيحة من أجل n + 1 أي $u_{n+1}>\frac{2}{3}$

لدينا $u_n>\frac{2}{3}$ تعني $\frac{1}{2}u_n>\frac{1}{3}$ و تعني أيضا :

$\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}>\frac{2}{3}$ أي : $u_{n+1}>\frac{2}{3}$

و منه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n=\frac{2}{3}$

ب/ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3} \quad / \quad u_n>\frac{2}{3} \text{ لكن}$$

أي $-\frac{1}{2}u_n<-\frac{1}{3}$ و منه : $-\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}<0$

أي : $u_{n+1}-u_n<0$

و بالتالي فإن المتتالية (u_n) متناقصة تــماما .

3/ أ/ تبيين أن المتتالية (v_n) هندسية: من أجل كل n طبيعي

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية .

أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{16}{3}$.

ب/ عبارة الحد العام لـــ : (v_n) هي :

$$v_n=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لدينا من أجل كل n طبيعي $u_n=v_n+\frac{2}{3}$

و منه $u_n=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}$

جــ/ / حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n=-\frac{32}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)$$

$$S'_n=u_0+u_1+...+u_n=\left(v_0+\frac{2}{3}\right)+\left(v_1+\frac{2}{3}\right)+...+\left(v_n+\frac{2}{3}\right)$$

$$=S_n+\frac{2}{3}(n+1)$$

أي : $S'_n=-\frac{32}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)+\frac{2}{3}(n+1)$

التمرين الثاني :

1/ مــميز المعادلة $z^2-6z+18=0$ هو -36

و بالتالي فالعدد 6i هو أحد جذري المميز .

و منه : للمعادلة حلين هما $3-3i$ و $3+3i$.

$3-3i=3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $3+3i=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2/ أ / لإثبات أن النقط A , B , C , D تنتمي إلى دائرة مركزها O نبين أن :

OA = OB = OC = OD حيث : $OD=|z_D|$ و $OC=|z_C|$ و $OB=|z_B|$ و $OA=|z_A|$

لدينا : $|z_B|=|\overline{z_A}|=|z_A|$ و $|z_C|=|-z_A|=|z_A|$ و

$$|z_D|=|-z_B|=|-\overline{z_A}|=|z_A|$$

و منه : OD = OC = OB = OA

أي أن النقط A , B , C , D تنتمي إلى دائرة مركزها O .

ب/ تعيين زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى النقطة B : زاوية الدوران R الذي يحول A إلى B هي عمدة العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$

أي : $\frac{3+3i}{-3-3i}$ أي : $-i$ و منه زاوية الدوران هي $-\frac{\pi}{2}$.

جــ/ النقط A , O , C في استقامية تعني :

$$(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})=k\pi$$

حيث $k\in\Re$ أي : $\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)=k\pi$

لدينا $\frac{z_A}{z_C}=\frac{3+3i}{-3-3i}=-1$ و منه : $\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)=-\pi$

وبالتالي فإن A , O , C في إستقامية .

ملاحظة : بنفس الطريقة السابقة نبين إستقامية النقط B , O , D .

د/ طبيعة ABCD : من النتائج السابقة يتبين لنا أن قطعتا المستقيم [DB] و [CA] متناصفتان في O و هما أقطار دائرة فهما متقايسان و لدينا $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=-\frac{\pi}{2}$

فهذا يعني أن : ABCD مربع .

التمرين الثالث :

1/ تعيين إحداثيات A نقطة تقاطع حامل $(O;\vec{i})$ مع المستوي (p)

نعوض y بــ 0 و z بــ 0 في معادلة (P) نحصل على $x=-3$

و بالتالي إحداثيات A هي (0 , 0 , 3-) .

2/ أ/ التحقق من أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (p) :

تأكد من أن إحداثيات B تحقق معادلة (P) .

ب/ حساب الطول AB : لدينا $\overline{AB}\,(0\,;0\,;-3)$

و منه : $AB=\sqrt{9+0+9}=3\sqrt{2}$

جـ/ حساب المسافة بين النقطة C و المستوي (p) :

لتكن المسافة المطلوبة هي d ، ومنه :

$$d=\frac{|x_c-2y_c+z_c+3|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{12}{\sqrt{6}}$$

3/ أ/ التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) :

بما أن (Δ) عمودي على (P) فهذا يعني أن شعاع توجيه (Δ) هو ناظمي لـ (P) و مركبات الشعاع الناظمي للمستوي هي (1 , 2- , 1) و بالتالي التمثيل الوسيطي للمستقيم الذي يشمل (2 , 4- , 1-) C و شعاع توجيه له $\vec{u}(1,-2,1)$ هي :

$$\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=-4-2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$$ مع λ عدد حقيق كيفي .

ب/ التحقق من أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ) :

لكي تكون A نقطة من (Δ) نبحث عن عدد حقيقي وحيد λ يحقق

$$\begin{cases} -3=-1+\lambda \\ 0=-4-2\lambda \\ 0=2+\lambda \end{cases}$$ واضح أن $\lambda=-2$ يحقق الجملة و منه A نقطة من (Δ) .

جـ/ حساب مساحة المثلث ABC :

مساحة المثلث ABC $=\dfrac{1}{2}d\times AB=6\sqrt{3}$

حيث : $d=\dfrac{12}{\sqrt{6}}$ و $AB=3\sqrt{2}$

التمرين الرابع :

1/ أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ب/ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=+\infty$ لأن الدالة $x\mapsto e^x-1$ متزايدة تـماما .

وهذا يعني أن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

2/ دراسة اتجاه تغير الدتلة f :

الدالة f تقبل الإشتقاق على مجالي تعريفها :

لدينا $f'(x)=1+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$

واضح أن $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على مجالي تعريفها .

جدول تغيرات الدالة الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3/ أ/ تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين : لدينا

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x-1}=0$ مما يعني أن (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

و لدينا أيضا :

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x-1)=\lim_{x\to-\infty}(-1+\frac{1}{e^x-1})=0$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ممايعني أن (Δ') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب/ وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$ أي : $-\dfrac{1}{e^x-1}$

الجدول الموالي يوضح إشارة $-\dfrac{1}{e^x-1}$:

$-\dfrac{1}{e^x-1}$	$-\infty$ + 0 + $+\infty$

إذن في المجال $]-\infty\,;\,0[$ يكون (C_f) فوق (Δ) و في المجال $]0\,;\,+\infty[$ يكون (C_f) تحت (Δ) .

وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ') ندرس الفرق $f(x)-x-1$ أي : $\dfrac{-e^x}{e^x-1}$

$\dfrac{-e^x}{e^x-1}$	$-\infty$	$+$	0	$+$	$+\infty$

إذن في المجال $]-\infty\,;\,0[$ و في المجال يكون (C_f) فوق (Δ') و في المجال $]0\,;\,+\infty[$ يكون (C_f) تحت (Δ') .

4/ حتى تكون النقطة $\omega(0\,;0{,}5)$ مركز تناظر (C_f) يجب أن يتحقق مايلي :

مجموعة التعريف تكون متناظرة بالنسبة للعدد 0 . و هو محقق ، من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$:

$$f(-x)+f(x)=2\times\frac{1}{2}=1$$

لدينا : $f(-x)+f(x)=-x-\dfrac{1}{e^{-x}-1}+x-\dfrac{1}{e^{x}-1}$

$$=-\frac{e^x}{1-e^x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{e^x-1}=1$$

مما يعني أن النقطة $\omega(0\,;0{,}5)$ هي مركز تناظر (C_f) .

5/ أ/ الدالة f رتيبة تماما على المجال $[\ln 2,1]$ و لدينا :

$$f(1)f(\ln 2)<0$$

لأن : $f(1)\approx 0{,}42$ و $f(\ln 2)\approx -0{,}31$

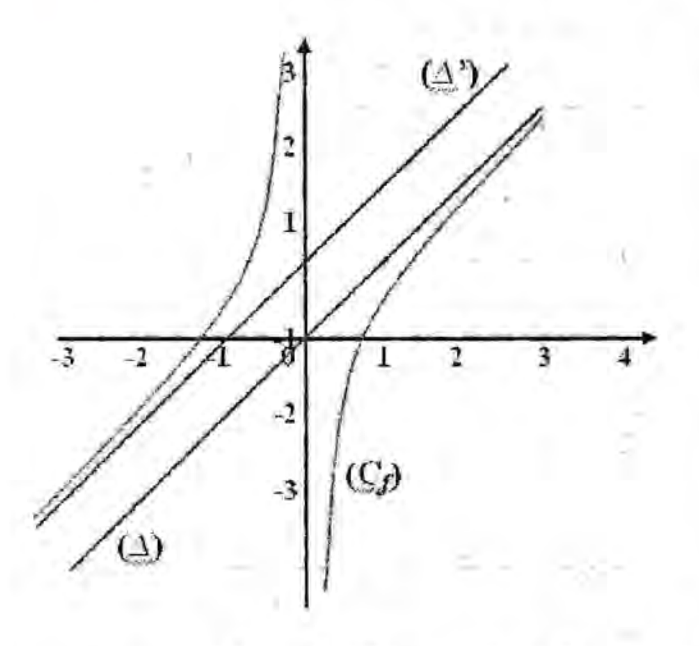
و حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد من المجال $[\ln 2,1]$ بحيث $f(\alpha)=0$ و بنفس الطريقة نثبت وجود العدد الحقيقي β من المجال $[-1{,}4;-1{,}3]$ بحيث $f(\beta)=0$.

ب/ مماسات (C_f) التي توازي المستقيم (Δ) تحقق $f'(x)=1$

أي : $1+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=1$ أي $\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$

هذه المعادلة ليست لها حلول في $\mathbb{R}^*$ أي أنه لا توجد مماسات توازي (Δ) .

جـ/ رسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) :



د/ مناقشة حلول المعادلة $(m-1)e^{-x}=m$

في حالة $m=1$ المعادلة $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $m=0$ و هذا مناقض للفرضية و منه لا توجد حلول للمعادلة في هذه الحالة .

في حالة $m=0$ المعادلة $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $m=0$ $m=1$ و هذا مناقض للفرضية و منه لا توجد حلول للمعادلة في هذه الحالة .

في حالة $m\neq 1$ المعادلة $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ

$$e^{-x}=\frac{m}{m-1}$$

إذا كان $\dfrac{m}{m-1}<0$ أي $m\in\,]0\,,\,1[$ فإن المعادلة $e^{-x}=\dfrac{m}{m-1}$ ليست لها حلول في $\mathbb{R}$.

إذا كان $\dfrac{m}{m-1}>0$ أي $m\in\,]-\infty\,,\,0[\,\cup\,]1\,,\,+\infty[$ فإن المعادلة $e^{-x}=\dfrac{m}{m-1}$ تكافئ $-x=\ln\dfrac{m}{m-1}$ أي $x=\ln\dfrac{m-1}{1}$

يمكن تلخيص النتائج السابقة في الجدول التالي :

m	حلول $(m-1)e^{-x}=m$
$[0\,,\,1]$	$\varnothing$
$]-\infty\,,\,0[\,\cup\,]1\,,\,+\infty[$	$x=\ln\dfrac{m-1}{1}$

الاختبار الخامس

بكالوريا جـــوان 2009

التمرين الأول : (3,5 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \quad ; \quad u_1 = 2$$

و : $u_0 = 1$. المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$v_n = u_{n+1} - u_n$.

1- أحسب v_0 و v_1 .

2- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

3- أ) أحسب بدلالة n المجموع :

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1$$

جـ) بين أن (u_n) متقاربة .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

$P(Z)$ كثير حدود حيث :

$$P(Z) = (Z - 1 - i)\,(Z^2 - 2Z + 4)$$

و Z عدد مركب :

1- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(Z) = 0$.

2- نضع : $Z_1 = 1 + i$ ، و : $Z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$

أ- أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي .

ب- أكتب $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي

جـ- استنتج القيمة المضبوطة لكل من

$\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

3- أ) n عدد طبيعي عين قيم n حيث يكون العدد $\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقياً .

3- ب) أحسب قيمة العدد $\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $\left(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\right)$

نعتبر النقط : $A(1 ;0 ;2)$ ، $B(0 ; 2 ; 1)$ ، $C(2 ; 1 ; 3)$

1- (P) مستو معادلة له من الشكل : $X - Z + 1 = 0$

أ) بين المستوي (P) هو المستوي (ABC) .

ب) ما طبيعة المثلث ABC .

2- أ) تحقق أن النقطة $D(2 ; 3 ; 4)$ لا تنتمي إلى (ABC)

ب) ما طبيعة $ABCD$.

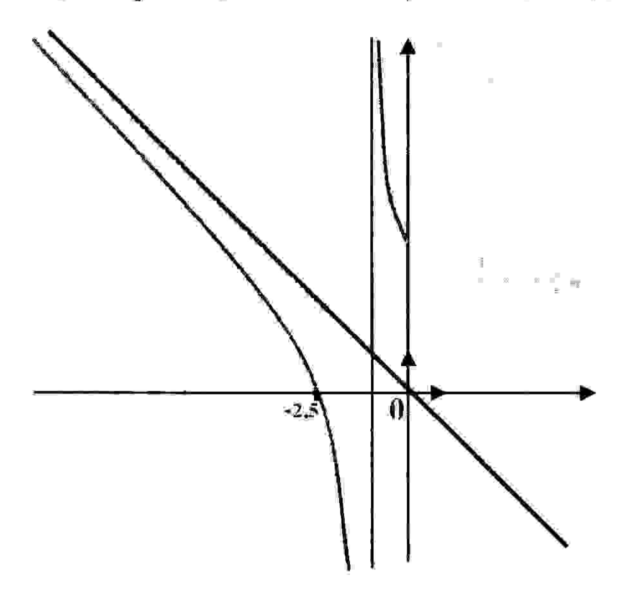
3- أ) أحسب المسافة بين D و المستوي (ABC) .

ب) أحسب حجم $ABCD$.

التمرين الرابع : (7,5 نقاط)

1- f دالة معرفة على : $I =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0]$

بـــ : $f(x) = -x + \dfrac{4}{x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس كما هي مبين في الشكل :



1- أ) أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـــ I .

ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتـــها .

2- g دالة معرفة المجال $]0\,;+\infty[$ كمايلـــــــي :

$g(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$. و (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

أ) أحسب نهاية g عند $+\infty$.

ب) تحقق من أن (Cg) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعين معادلة لـــه .

جـ) أدرس تغيرات g .

II) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كمايلي :

$$k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$$

1- أ) أحسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ، و : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$. ماذا تستنتج ؟

ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

2- أكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

3- أرسم $(\Delta1)$ ، $(\Delta2)$ و (Ck) .

4- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها :

$y=0$ ، $x=\dfrac{1}{2}$ ، $x=-\dfrac{1}{2}$.

حل الاختبار الخامس

التمرين الأول :

1- حساب v_0 و v_1 :

لدينا : $v_n=u_{n+1}-u_n$

و منه : $v_0=u_1-u_0=2-1=1$

$$v_1=u_2-u_1=\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}$$

2- البرهان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها :

(v_n) متتالية هندسية معناه : $v_{n+1}=v_n\times q$

لدينا : $v_n=u_{n+1}-u_n$ و منـــــــــــه :

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n-u_{n+1}$$

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_{n+1}-u_n)=\frac{1}{3}v_n$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{3}$

3- أ) حساب المجموع S_n بدلالة n :

لدينا : $S_n=v_0+v_1+\dots+v_{n-1}$ و منه :

$$S_n=v_0\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]=1\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right]=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

ب) البرهان أن : $u_n=\dfrac{3}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

لدينا : $S_n=v_0+v_1+\dots+v_{n-1}$

و منه : $S_n=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\dots+(u_n-u_{n-1})$

بعد التبسيط : $S_n=-u_0+u_n$

و منه : $u_n=u_0+S_n$ ،

و أخيرا : $u_n=\dfrac{3}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)+1$

جـ) تبيين أن (u_n) متقاربة :

(u_n) متقاربة معناه : $\lim_{x \to +\infty} u_n = \alpha$ حيث : $\alpha \in \mathbb{R}$ ثابت . لدينا :

$$\lim_{x \to +\infty} u_n = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1=\frac{5}{2}$$

لأن : $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

التمرين الثاني :

1- حل المعادلة : $P(Z) = 0$ في المجموعة $\mathbb{C}$.

لدينا : $P(Z) = 0$ معناه :

$$(Z - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4) = 0$$

و منه : $(Z^2 - 2Z + 4) = 0$ أو : $(Z - 1 - i) = 0$

و منه : $(Z - 1 - i) = 0$ أي : $Z = 1 + i$.

$$(\bigstar) \ \ldots\ldots \ (Z^2 - 2Z + 4) = 0$$

لحل المعادلة $(\bigstar)$ نستعمل المميز المختصر :

$\Delta' = b'^2 - ac$ لدينا : $\Delta' = (1)^2 - (1)(4) = -3$

أي : $\Delta' = \left(\sqrt{3}i\right)^2$. ومنه حلي المعادلة $(\bigstar)$ هما :

$$z' = \frac{1-\sqrt{3}i}{1} \quad \text{و} \quad z'' = \frac{1+\sqrt{3}i}{1}$$

و منه حلول المعادلة $P(Z) = 0$ هي :

$$z = 1-\sqrt{3}i \ , z = 1+\sqrt{3}i \ , z = 1+i$$

2- أ) كتابة العددين Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$z_2 = 1-\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ب) كتابة العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكلين الجبري و الأسي :

الشكل الجبري : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$

بضرب حديه في مرافق المقام و بعد الحسابات نجد :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1-\sqrt{3})+i\,(1+\sqrt{3})}{4} = \frac{(1-\sqrt{3})}{4}+i\,\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$$

الشكل الأسي :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$$

جـ) استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$

من الجواب السابق لدينا :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\,\sin\frac{7\pi}{12}\right) \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1-\sqrt{3})}{4}+i\,\frac{(1+\sqrt{3})}{4} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

بالمطابقة بين الشكلين نجد (1) و (2) نجد :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\,\sin\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{(1-\sqrt{3})}{4}+i\,\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$$

و منه : $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{2(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

3- أ) تعيين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقياً :

لدينا : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{7n\pi}{12}\right)}$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left(\cos\frac{7n\pi}{12}+i\sin\frac{7n\pi}{12}\right)$$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقياً معناه : $\sin\frac{7n\pi}{12} = 0$ و منه :

$$(k \in \mathbb{Z}) \ \ n = 12k$$

ب) حســـــاب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$:

حسب دستور موافر لدينا :

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}\left(\cos\frac{7(456)\pi}{12}+i\sin\frac{7(456)\pi}{12}\right)$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}(\cos 0+i\sin 0)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}$$

لأن : $\frac{7(456)\pi}{12}=266\pi=(133)2\pi+0$

التمرين الثالث :

1- أ) تبيين أن المستوي (P) هو المستوي (ABC) :

المستوي (P) هو المستوي (ABC) معناه أن احداثيات النقط C , B , A تحقق صحة معادلة (P) .

لدينا : $A\in(P)$ لأن : $1+0-2+1=0$.

$B\in(P)$ لأن : $0+0(2)-1+1=0$

$C\in(P)$ لأن : $2+0(1)-3+1=0$

ب) تعيين طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ، و :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1.1+2.1-1.1=0$$

و منه المثلث ABC قائم في A .

2- أ) التحقق أن النقطة D لا تنتمي للمستوي (ABC)

D لا تنتمي إلى (ABC) معناه : احداثيا النقطة D لا تحقق صحة المعادلة : $x-z+1=0$.

لدينا : $2+0(3)-1(4)+1\neq 0$.

و منه : $D\notin(ABC)$

ب) تعيين طبيعة ABCD :

ABCD هو رباعي وجوه .

3- أ) حساب المسافة بين D و المستوي (ABCD) :

لدينا : $d(\Delta;ABC)=\frac{|1(2)+0(3)-1(4)+1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ب/ حساب حجم رباعي الوجوه ABCD :

$V=\frac{1}{3}S.h$ حيث $h=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $S=\frac{1}{2}AB\,.\,AC$

لدينا : $AB=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

$AC=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

و منه : $V=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\sqrt{3}.\sqrt{6}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

التمرين الرابع :

I) 1- أ) حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـــــ I :

لدينا : $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ و $f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$. و منه :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\left(1+\frac{4}{x+1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left(1+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

ملاحظة : يمكن استنتاج هذه النهايات من البيان .

ب) تشكيل جدول التغيرات بقراء بيانية :

x	$-\infty$ -1	0
$g'(x)$	-	-
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 4

2- أ) حساب نهاية f عند $+\infty$:

g معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـــــ : $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

ب) التحقق من أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً (Δ) :

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ لأن :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x)= \lim_{x \to +\infty}\left(x+\frac{4}{x+1}-x\right)= \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{u}{x+1}\right)=0$$

جـ) دراسة تغيرات الدالة g :

اتجاه التغير :

لدينا : g قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; +\infty[$ حيث :

$$g'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$g'(x) = 0$ معناه : $(x-1)(x+3) = 0$ أي : $x=1$

إشارة المشتق هي حسب الجدول التالي :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	1	0
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	4 ↘	$f(1)$	↗ $+\infty$

ملاحظة : $f(1) = 3$.

II-1/ أ) حساب $\lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{k(h)-k(0)}{h}$ و $\lim\limits_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{k(h)-k(0)}{h}$:

k معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h}$$

$$=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{h^2-3h}{h(h+1)}=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{h-3}{(h+1)}=-3$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h}$$

$$=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{-h^2-5h}{h(h+1)}=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{-h-5}{(h+1)}=-5$$

نستنتج أن k ليست قابلة للإشتقاق عند 0 لأن العدد المشتق من اليمين (3-) لا يساوي العدد المشتق من اليسار (5-) .

ب) إعطاء تفسيرا هندسيا للنتيجة :

بما أن الدالة k قابلة للإشتقاق من اليمين و قابلة للإشتقاق من اليسار فإن منحنى الدالة k يقبل نصفي مماس عند النقطة التي فاصلتها 0 .

يمكن القول أن النقطة التي احداثياتها $(0 ; 4)$ هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة k .

2) كتابة معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$:

– معادلة نصف المماس (Δ_1) :

(Δ_1) هو نصف المماس عند $x_0 = 0$ حيث $x_0 \geq 0$

لدينا : $y = k'(0)\,(x-0) + k(0)$

ومنه : $y = -3(x-0) + 4$ أي : $y = -3x + 4$.

– معادلة نصف المماس (Δ_2) :

(Δ_2) هو نصف المماس عند $x_0 = 0$ حيث : $x_0 \leq 0$

لدينا : $y = k'(0)\,(x-0) + k(0)$

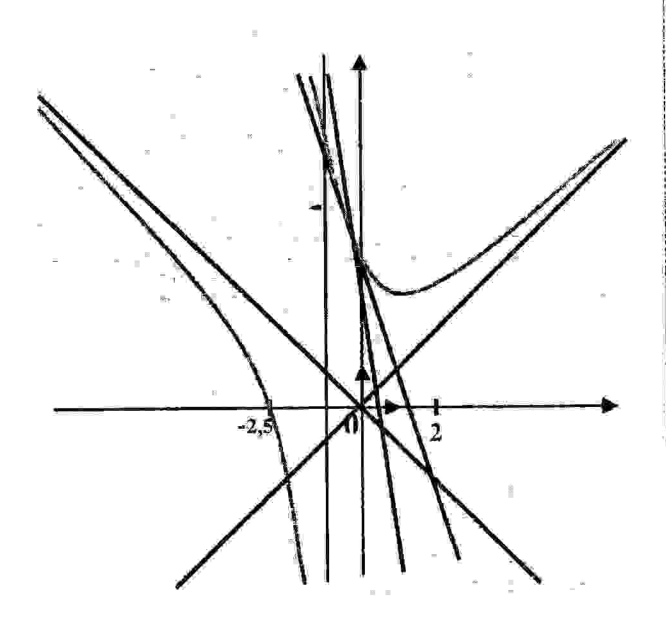
ومنه : $y = -5(x-0) + 4$ أي $y = -5x + 4$

3– رسم كلا من (Δ_1) و (Δ_2) و المنحنى (C_k) :

لرسم المنحنى (C_k) نلاحظ :

إذا كانت $x \leq 0$ فإن : $k(x) = f(x)$ و منه : $(C_f) = (C_k)$

إذا كانت $x \geq 0$ فإن : $k(x) = g(x)$ و منه : $(C_g) = (C_k)$



4) حساب المساحة :

نرمز بـ A لمساحة الحيز المستوي و المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها :

$$x=-\frac{1}{2} \text{ ، } x=\frac{1}{2} \text{ ، } y=0$$

ومنه :

$$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}} g(x)dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}+4\ln(x+1)\right]_{\frac{1}{2}}^{0}+\left[-\frac{x^2}{2}+4\ln(x+1)\right]_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{8}-4\ln2+\frac{1}{8}+4\ln3-4\ln2=4\ln3\ (u.a)$$

الاختبار السادس

بكالوريا جـــــوان 2009

التمرين الأول : (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط : $A(2\ ;3\ ;-1)$ ، $B(1\ ;-2\ ;4)$

$C(3\ ;0\ ;-2)$ ، $D(1\ ;-1\ ;-2)$

و ليكن (π) المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية :

$$2x-y+2z+1=0$$

– الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :

1– النقط A, B, C في استقامية .

2– (ABD) مستوي معادلة ديكارتية لـــــــه :

$$25x-6y-z-33=0$$

3– المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π) .

4– المسقط العمودي للنقطة B على (π) هو النقطـــــة $H(1\ ;1\ ;-1)$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$:

1– حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$

2– نسمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة .

أ) اكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

ب) A, B, C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ ، $z_C=\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$ (i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقـــــق $i^2=-1$) .

أحسب الأطوال AB ، AC ، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

جـــ) جد الطويلة و عمد للعدد المركب Z حيث :

$$Z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$$

د) أحسب Z^3 و Z^6 ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .

التمرين الثالث :(05 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث : $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

1. أ) احسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1.

ب) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ) أحسب S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = 728$

2. (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_1 = 2$ ، $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ) أحسب v_2 و v_3.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$. بين أن (w_n) متتالي هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ) أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج w_n بدلالة n.

التمرين الرابع :(07 نقاط)

الجزء الأول :

h دالة عددية معرفة على $]-1 ; +\infty[$ كمايلي : $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

1- أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} h(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1 ; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1 + 2(x+1)^2}{x+1}$.

و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها.

3- أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x.

الجزء الثاني :

لتكن f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ كمايلي

$f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

1. أ) أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$ ، ثم فسر هذه النتيجة بيانياً.

ب) باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$.

جـ) استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x))$.

د) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x-1))$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

هـ) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل

2- بين أنه من أجل x من المجال $]-1 ; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$. ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3- بين أن المنحنى (C_f) يقطع مستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

4- أرسم (C_f).

5- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y = x - 1$ ، $x = 0$ ، $x = 1$.

حل الاختبار السادس

التمرين الأول :

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :

1- الإجابة خاطئة لأن : $\overrightarrow{AB}(-1,-5,5)$ لا يوازي $\overrightarrow{AC}(1,-3,-1)$ أي : $\frac{1}{-1} \neq \frac{-3}{-5}$.

2- الإجابة صحيحة لأن : الثلاثية إحداثيات النقـــــــط C , B , A تحقق صحة المعادلة :

$$25x-6y-z-33=0 \ .$$

لدينا : $25(2)-6(3)-(-1)-33=0$ أي $A\in(ABD)$

$25(1)-6(-2)-4-33=0$ أي : $B\in(ABD)$

$25(1)-6(-1)-(-2)-33=0$ أي $D\in(ABD)$

3- الإجابة خاطئة لأن الشعاع $\overrightarrow{CD}(-2,-1,0)$ لا يوازي الشعاع الناظم $\overrightarrow{n_\pi}(2,-1,2)$ أي : $\frac{2}{-2}\neq\frac{-1}{-1}$

4- الإجابة خاطئة لأن : $HB=\sqrt{34}\neq d(B;(\pi))=\frac{17}{3}$

التمرين الثاني :

1- حل المعادلة $z^2-2z+4=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$:

لحل هذه المعادلة نستعمل المميز المختصر : $\Delta'=b'^2-ac$

لدينا: $\Delta'=(-1)^2-(1)(4)=-3$ أي : $\Delta'=(\sqrt{3}i)^2$

و منه حلي المعادلة (e) هما :

$$z_1=\frac{1-\sqrt{3}i}{1} \quad , \quad z_2=\frac{1+\sqrt{3}i}{1}$$

2. أ) كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي :

لدينا :

$$z_1=1-\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_2=1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب) حساب الأطوال AB ، AC ، BC :

$$AB=|z_A-z_B|=|-2\sqrt{3}i|=2\sqrt{3}$$

لدينا : $AC=|z_A-z_C|=\left|\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right|=3$

$$BC=|z_C-z_B|=\left|\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{3}$$

- استنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $AB^2=12$ و $BC^2+AC^2=9+3=12$

و منه المثلث ABC قائم في C لأن : $BC^2+AC^2=AB^2$

جـ) إيجاد طويلة و عمدة للعدد المركب Z :

لدينا : $Z=\frac{z_c-z_B}{z_A-z_B}$ و منـــــــه :

$$|Z|=\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\arg(Z)=\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\arg(z_C-z_B)-\arg(z_A-z_B)$$

$$\arg(Z)=\arg\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\arg\left(-2\sqrt{3}i\right)+2k\pi$$

$$\arg(Z)=\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

حساب Z^3 و Z^6 ثم استنتج أن Z^{3k} :

لدينا : $|Z|=\frac{1}{2}$ $\quad \arg(Z)=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ أي :

و منه : $Z=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad Z^3=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=\frac{1}{2^3}e^{i\frac{3\pi}{3}}$

و منه : $Z^3=\frac{1}{8}e^{i\pi}=\frac{-1}{8}$.

لدينا : $Z^6 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = \frac{1}{2^6}e^{i\frac{6\pi}{3}}$

و منه : $Z^6 = \frac{1}{64}e^{i2\pi} = \frac{1}{64}$.

لدينا : $Z^{3k} = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3k} = \frac{1}{2^3}e^{i\frac{3k\pi}{3}} = \frac{1}{8}e^{ik\pi}$

نـــميز حالتين هما :

إذا كان k عدد طبيعي زوجي فإن : $Z^{3k} = \frac{1}{8}e^{ik\pi} = \frac{1}{8}$

إذا كان k عدد طبيعي فردي فإن : $Z^{3k} = \frac{1}{8}e^{ik\pi} = \frac{-1}{8}$

و في الحالتين Z^{3k} هو عدد حقيقي .

التمرين الثالث :

1. أ) حساب u_2 و الأساس q و استنتاج الحد الأول :

لدينا : $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} \frac{u_2}{q} + 2u_2 + u_2 q = 32 \\ u_2^3 = 216 \end{cases}$

و منه : $\begin{cases} 1 + 2q + q^2 = \frac{16}{3}q \\ u_2 = 6 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} q = 3 \vee q = \frac{1}{3} \\ u_2 = 6 \end{cases}$

و بما أن المتتالية متزايدة فإن : $q = 3$ و $u_2 = 6$.

لدينا : $u_2 = u_1 q$ و منه : $u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{3} = 2$.

ب) كتابة عبارة الحد u_n بدلالة n :

لدينا

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} = u_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$

و منه : $S_n = 2\left(\frac{3^n - 1}{3 - 1}\right) = 3^n - 1$.

تعيين العدد الطبيعي n حيث يكون : $S_n = 728$.

$S_n = 728$ معناه : $3^n - 1 = 278$.

أي : $3^n = 279 = 3^6$ إذن : $n = 6$.

2. أ) حساب v_2 و v_3 :

لدينا : $w_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$ و $v_1 = 2$

و منه :

$$v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = \frac{3}{2}(2) + 2 = 5$$

$$v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{3}{2}(5) + 6 = \frac{27}{2}$$

ب) تبيين أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

(w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه : $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$

لدينا : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$.

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3}$$

و منه :

$$w_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n}{3u_n} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$$

أي : $w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}w_n$

جـ) كتابة w_n بدلالة n و استنتاج v_n بدلالة n :

لدينا : $w_n = w_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

حيث : $w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = \frac{2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

و منه : $w_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

لدينا : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ و منه : $w_n + \frac{2}{3} = \frac{v_n}{u_n}$

أي : $v_n = u_n\left(w_n + \frac{2}{3}\right)$

إذن : $v_n = 2.3^{n-1}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\right)$

$$v_n = 4.3^{n-2}\left(2^{-n} + 1\right)$$

التمرين الرابع :

الجزء الأول : **Hard_equation**

1) حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} h(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

$h(x) = x^2 + 2x + \ln(x + 1)$

معرفة على $]-1 ; +\infty[$.

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + 2x + \ln(x+1)\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \left(1 - 2 + \ln(x+1)\right) = -\infty$$

2) تبيين أن : $h'(x) = \dfrac{1 + 2(x + 1)^2}{x + 1}$

لدينا : $h'(x) = 2x + 2 + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة h و تشكيل جدول تغيراتها :

بما أن $x > 1$ فإن $h'(x) > 0$ ومنه h متزايدة تماما .

x	$1-$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+		+
$h(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

3) حساب $h(0)$ و استنتاج إشارة $h(x)$:

$h(0) = 0$ و إشارة $h(x)$ هي حسب الجدول التالي :

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني :

1. أ) حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$ و تفسير النتيجة بيانياً :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \left(-2 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = +\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \left(\ln(x+1)\right) = -\infty$

و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \left(\dfrac{-1}{x+1}\right) = -\infty$

نستنتج وجود مستقيم مقارب معادلته : $y = -1$

لـــ (C_f) :

ب) البرهان أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln u}{u}\right) = 0$

نضع $t = \ln(u)$ و منه : $u = e^t$

لدينا : إذا كان $u \to +\infty$ فإن : $t \to +\infty$.

و منه : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln u}{u}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{t}{e^t}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{e^t}\right) = 0$

جـ) استنتاج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$: لدينا :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x-1) - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty - 0 = +\infty$$

د) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x-1)\right)$: لدينا :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x-1)\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = 0$$

* استنتاج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x-1)\right) = 0$ و منه المنحنى يقبل

مستقيم مقارب مائل معادلته : $y = x - 1$ في جوار $+\infty$.

هـــ) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل

ندرس إشـــــــــــــارة الفـــــــــــرق

$$\left(f(x) - (x-1)\right) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

إشارة الفرق هي حسب إشارة $-\ln(x + 1)$

لأن : $x + 1 > 0$ و $-\ln(x + 1) = 0$

معناه : $\ln(x + 1) = 0$ أي $x = 0$

◈ $-\ln(x + 1) \geq 0$ معناه : $\ln(x + 1) \leq 0$

أي : $-1 < x \leq 0$.

◈ $-\ln(x + 1) \leq 0$ معناه : $\ln(x + 1) \geq 0$

أي : $x \geq 0$

نـــــــستنتج مايلي :

◈ $-1 < x \leq 0$ معناه (C_f) فوق المستقيم المقارب المائل .

◈ $x = 0$ معناه (C_f) يقطع المستقيم المقارب في النقـــــــطة $(0 ; -1)$.

◈ $x \geq 0$ معناه (C_f) تحت المستقيم المقارب المائل .

2) تبيين أن : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$

لدينا : f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1 ; +\infty[$ حيث :

$$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x+1}(x+1)-1\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

و منه : $f'(x)=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$

تشكيل جدول التغيرات :

إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $h(x)$: جدول التغيرات :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(0)$	↗ $+\infty$

3- تبين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$

المنحنى (C_f) يقطع المستقيم : $y=2$ معناه المعادلة

$f(x)=2$

تقبل حلاً وحيداً α محصوراً بين $3,3$ و $3,4$.

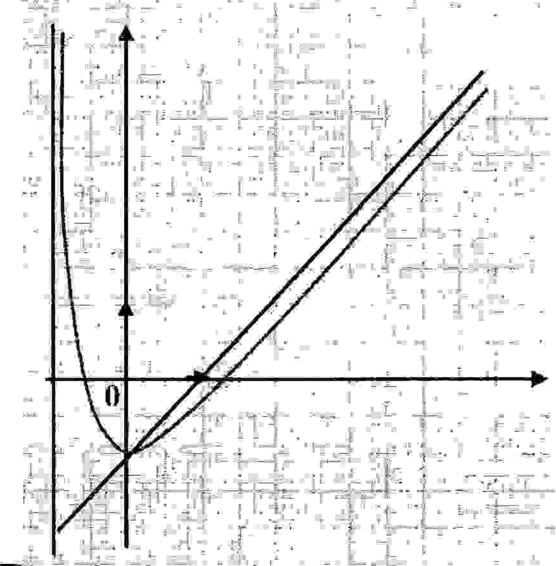
f متزايدة على المجال $[3,3\,;\,3,4]$ حسب جدول التغيرات

و لدينا : $f(3,3)=1,96$ و $f(3,4)=2,06$

و نلاحظ أن : $f(3,3)<2<f(3,4)$.

– و منه و حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α محصوراً بين $3,3$ و $3,4$ ، بحيث : $f(\alpha)=2$

4) رسم المنحنى (C_f) :



5) حساب المساحة :

نرمز بـ A لمساحة الحيز المستوي و المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x-1$ ، $x=1$ ، $x=0$.

و منه : $A=\int_0^1((x-1)-f(x))dx=\int_0^1\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx$

بوضع : $u=\ln(x+1)$ فإن : $u'=\frac{1}{x+1}$

الدالة : $x\rightarrow\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ من الشكل :

$x\rightarrow u(x).u'(x)$ و منه الدالة الأصلية لها هي من الشكل :

$x\rightarrow\frac{1}{2}[u(x)]^2+c$.

و منه :

$$A=\frac{1}{2}[(\ln(x+1))^2]_0^1=\frac{1}{2}\left[(\ln(2))^2-(\ln 1)^2\right]$$

أي : $A=\frac{1}{2}(\ln(2))^2$.

الاختبار السابع

بكالوريا جوان 2008

التمرين الأول : (3 نقاط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط .

عيّن الجواب الصحيح مُعللا اختيارك . نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط

A(1,3,-1) ؛ **B(4,1,0)**

C(-2,0,-2) ؛ **D(3,2,1)**

و المستوي **(P)** الذي معادلته : $4x-3z-4=0$

1- المستوي **(P)** هو : ج1) - **(BCD)** ج2) - **(ABC)** ج3) - **(ABD)**

2- شعاع ناظمي للمستوى **(P)** هو :

ج1) $\vec{n_1}(1,2,1)$ ج2) $\vec{n_2}(-2,0,6)$ ج3) $\vec{n_3}(2,0,-1)$

3- المسافة بين النقطة **D** و المستوي **(P)** هي :

ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

التمرين الثاني : (5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0=\frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{3}{2}u_n+2$

1. أ) ارسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{2}{3}x+2$

1.ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 .

1.جـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

2. أ – برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le 6$

2.ب- تحقق أن (u_n) متزايدة .

2.جـ- هل (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- أكتب عبارة (u_n) بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$

التمرين الثالث : (5 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$z^2+iz-2-6i=0$$

2. نعتبر المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$
النقطتين A و B اللتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث :

$$z_B=-2-2i \quad \text{و} \quad z_A=2+i$$

عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3. لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث : $z_C=\frac{4-i}{1+i}$
اكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

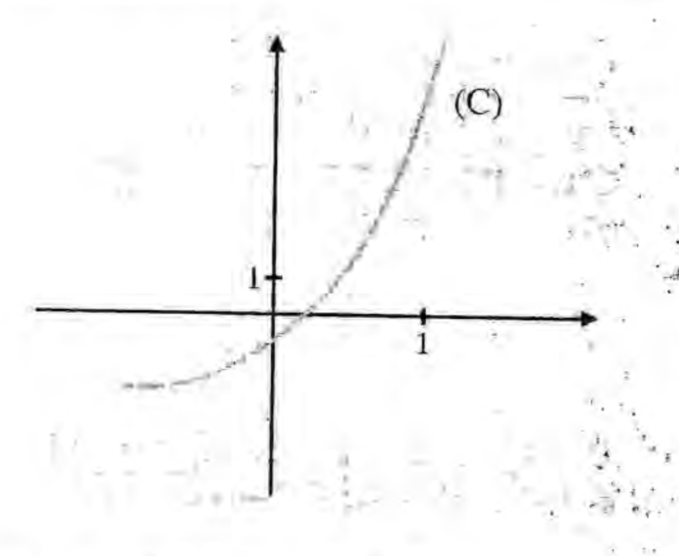
4. أ- برهن أنّ عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ و النقطة $M'(z')$ هي : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$

4.ب- تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـــ : $z'+\frac{1}{2}i=2.e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال : $]-1,+\infty[$ كما يأتي :

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$$



1.أ – بقراءة بيانية شكّل جدول تغيرات الدالة g و حدّد $g(0)$ و إشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

1.ب- علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ يحقق : $g(\alpha)=0$.

1.جـ- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$.

2- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يأتي : $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1,+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

ب- عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسّر النتيجة بيانيا .

جـ- أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$
و فسر النتيجتين بيانيا .

د- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3- نأخذ $\alpha\approx 0{,}26$.

أ- عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب- أرسم المنحنى (Γ) .

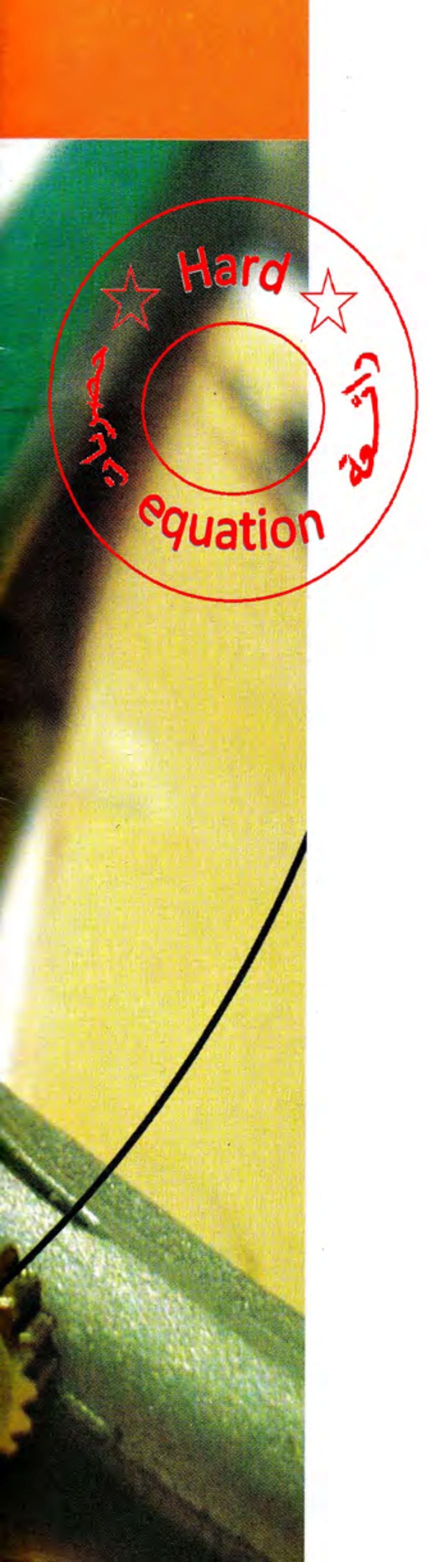
4. أ – أكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان .

4.ب- عيّن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال : $]-1,+\infty[$ و التي تحقق : $F(1)=2$.

Hard_equation

Hard_equation

^^


Hard
equation

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير

و النجاح و المغفرة ☺

Hard_equation